Lucas Sempéré

Peut-on penser l'infini ?

L'infini. Un mot si court pour signifier tellement… Le concept de l'infini fascine pour son abstraction et pour ce qu'il représente. L'infini parait insaisissable, hors de portée dans le sens où il est si éloigné de notre entendement qu'il est difficile de se l'imaginer. Mais aussi complexe que cela puisse paraitre, le lecteur est invité à user de sa réflexion et à son imagination pour se laisser transporter par le flot du texte.

Ce projet consiste à s'interroger sur le concept de l'infini lui-même pour en révéler ses mystères : Son origine et son histoire, ses paradoxes, sa conception, son utilisation, sa réalité physique… Par une approche ludique et didactique, l'objectif est de faire voyager le lecteur à travers les différents axes de lecture que propose cette réflexion, et lui faire vivre une expérience inédite.

Penser l'infini, Que cela implique-t-il ?

Histoire :

Pour savoir où l'on va, il vaut mieux avoir connaissance d'où l'on vient. C'est pourquoi cette section est dédié à poser les bases et le contexte du concept de l'infini. Il s'agit d'observer l'évolution de la perception de l'infini à travers le temps. Quel est son origine et comment traverse-t-il les âges ?

Concepts :

Cette section est dédiée aux concepts mathématiques fréquemment basics qui utilisent la notion d'infini. L'infini est omniprésent en mathématiques. En passant des nombres, aux ensembles, on découvre qu'il existe même différents infinis plus ou moins « grands ».

Paradoxes :

Ces articles ont pour objectif de s'amuser avec les différents problèmes et casse-têtes classiques et bien connus qui émergent de la notion d'infini. Les paradoxes mathématiques nous poussent à renoncer à une certaine rationalité, ce qui intrigue.

Voyages :

L'univers recèle de secrets qui n'attendent qu'a être découverts. Il s'agit ici de parcourir notre monde de l'infiniment petit à l'infiniment grand pour découvrir des objets surprenants. Alors prenons un peu de hauteur et partons à la recherche de l'infini dans l'espace et le temps !

Comment l'homme en est-il venu à se questionner sur l'infini ?

Il fait sombre et froid. Il marche droit devant lui dans l'obscurité. Une petite lueur le guide dans la nuit noire. Il lève la tête comme pour chercher l'origine de cette lumière. Il s'émerveille.

Il s'émerveille des petites veilleuses qui illuminent le fond noir continu d'une lumière froide et lointaine. L'éclat de ces lueurs déchire l'obscurité. Il fixe intensément ces points lumineux mais il est attiré par autre chose qui est au-delà de ces lumières, une chose bien plus profonde encore. C'est une obscurité absolue et totale. Elle l'enveloppe et l'emprisonne dans son espace vide et profond. L'intensité du firmament n'est rien devant ce monstre venu des profondeurs du néant. Il perd pieds, il est désorienté et confus. Ces émotions se mélangent et dans ce pot-bouille de sentiments, l'homme est happé par l'infini de l'univers.

Il est naturel de ressentir de la fascination devant le concept d'infini. Il est symbole d'éternité, d'absolue, d'immensité : tous ce qui peut nous faire perdre nos moyens. Sa profondeur peut paraitre effrayante, passionnante, voire intrigante selon la sensibilité de chacun. C'est un concept abstrait qu'il est difficile à concevoir.

L'infini est comme son nom l'indique, sans fin. Mais s'il n'a pas de fin, il y a bien un début à son histoire. Les réflexions sur l'infini remontent à l'antiquité. Alors que les mathématiciens utilisaient les nombres pour compter, à des fins pratiques, le philosophe grec Zénon d'Elee met en évidence le premier paradoxe de l'infini et démontre l'impossibilité du mouvement. En dévoilant un petit morceau de cette notion étrange, les grecs en prennent peur et décident de la faire taire. « L'existence de l'infini est potentielle… il n'existe pas en réalité » écrit Aristote dans *Physique*.

<u>L'évolution de l'infini ?</u>

L'infini fait débat depuis qu'il a mentionné pour la première fois. Celui-ci intervient de manière prépondérante lorsqu'il est question de l'univers et de sa taille.

Aristote estime que l'infini n'existe qu'en puissance et non en acte. C'est-à-dire qu'il ne peut que prendre forme dans les fabulations de l'esprit humain et qu'il n'a pas de réalité physique puisqu'il est absent de la nature. Il soutient l'idée que l'univers est fermé et qu'il n'y a rien au-delà. L'infiniment grand est donc à exclure pour Aristote puisque rien n'est plus grand que l'univers qui est fini, l'infiniment petit doit être considéré comme potentiel quant à lui.

L'arrivée du Christianisme reprend la notion aristotélicienne et définit l'au-delà de l'univers fini comme la demeure de Dieu. La théorie chrétienne soutient alors que l'homme, être privilégié de l'univers occupe la place centrale de celui-ci. Mais en 1543, Copernic réintroduit l'héliocentrisme dans la sphère scientifique (hypothèse déjà formulée au XIII siècle), tout en gardant l'idée d'un univers fini dont le centre serait occupé approximativement par notre Soleil. Puis, le philosophe italien Giordano Bruno critique violemment la vision aristotélicienne dans son ouvrage *De l'infini, de l'univers et des mondes* et prône un univers infini et une pluralité des mondes habités. Il base ses arguments sur la physique des phénomènes qu'il observe et non pas sur la théologie communément admise en Europe. Mais il est conduit au bûcher pour avoir soutenu de tels propos et tombe dans l'oubli. Les observations de Kepler et de Galilée mettent en lumière l'abandon du dogmatisme aristotélicien et se montrent prudentes sur la question de la finitude se l'univers. La révolution Newtonienne revient mettre le débat à l'ordre du jour grâce à sa théorie de la gravitation. La construction du cosmos s'explique donc par cette théorie qui associe l'espace physique à l'espace géométrique (nécessairement euclidien), qui est alors infini dans toutes les directions. Par son arrivée triomphale, Newton impose sa théorie d'espace infini et éternel, mais au début du XXème siècle, une révolution cosmologique s'opère avec notamment l'arrivée d'Einstein et sa théorie de la relativité générale. Le concept même d'espace-temps est redéfini et alors que l'univers était un espace immuable, il devient déformable par la matière. On parle alors de courbure de l'espace-temps. C'est en 1917 qu'Einstein propose un modèle d'univers fini mais sans frontière. Il choisit de modéliser l'univers par une hyper sphère. Ce modèle ne sera pas retenu par la communauté scientifique mais vient réactualiser le débat sur l'univers. Alors que les instruments de mesure connaissent un progrès, les scientifiques s'aperçoivent que l'univers se dilate, il s'étend et entraine les galaxies dans son expansion.

Donc après toutes ces controverses, l'Univers est-il fini ou infini ? Tout d'abord, il faut admettre que deux propriétés le caractérisent : sa courbure et sa topologie. La courbure d'un espace peut être de trois types : « nulle », l'espace est plat, la géométrie euclidienne s'applique, c'est la courbure d'une feuille de papier sur laquelle ont dessinerait un triangle dont la somme des angles fait 180°. « Positive », caractérise un espace fermé, en reprenant l'exemple de la feuille à deux dimensions, ici l'espace serait une sphère. « Négative », caractérise un espace ouvert, pour se donner un exemple en deux dimensions, on peut prendre l'hyperboloïde. La topologie d'un espace fait référence aux notions de limites, de continuité. En négligeant les subtilités topologiques, le caractère fini ou infini de l'univers dépend uniquement de sa courbure. La théorie de la relativité générale nous donne une méthode pour la calculer : elle dépend de la densité moyenne de matière et d'énergie contenues par l'univers, ainsi que d'une constante notée Λ et appelé constante cosmologique. Cette constante est justifiée au niveau mathématique mais n'a pas encore de signification physique. De nombreuses spéculations sont formulées quant à la valeur de ces deux constantes (courbure Λ) et mais la question du caractère fini ou infini de l'univers reste ouvert jusqu'à ce jour. Si de nouveaux résultats démontrent une courbure positive, la balance penchera vers un modèle d'univers fini ; sinon seule l'étude de la topologie de l'espace de l'univers pourra déterminer sa finitude ou pas.

Le calcul de π par la méthode d'Archimède

Calculer l'aire d'un cercle n'est pas une mince affaire, lorsque la constante nous permettant de faire le calcul est infini. Archimède propose donc de considérer un triangle, inscrit dans le cercle, dont les sommets sont sur le cercle.

Il est aisé de calculer l'aire de ce polygone et ainsi d'approcher celui du cercle. Mais en augmentant le nombre de côtés du polygone inscrit, on augmente également le degré de précision de l'aire du cercle. Archimède propose alors de considérer une suite de polygones dont le nombre de côtés (n) augmente. Lorsque n augmente, le polygone se rapproche de la forme du cercle tout en restant à l'intérieur, donc l'aire calculée se rapproche de celle du cercle tout en restant inférieure. Puis, il réalise le même procédé mais cette fois ci en considérant des polygones extérieurs au cercle. La suite des aires converge vers celle du cercle mais par l'extérieur. Cette méthode lui permet d'encadrer la valeur réelle de l'aire d'un cercle et donc de déterminer une valeur approchée de π.

Il est intéressant de constater qu'à partir de grandeurs finies, existantes et donc supposées calculables, l'infini puisse surgir de nul part. Aujourd'hui, on a aucun mal à accepter que le cercle soit qu'un polygone au nombre de côtés infinis par extrapolation. Mais pendant l'Antiquité, soutenir un tel discours était une hérésie. En effet, penser que l'infini pouvait se matérialiser physiquement dans la vie réelle ne pouvait pas se concevoir car on ne peut pas se saisir pleinement de la notion. Aristote refusait catégoriquement l'existence physique et matérielle du concept d'infini actuel. Encore aujourd'hui, l'implémentation de la valeur de pi dans les ordinateurs n'est qu'approchée. Sa valeur absolue ne peut être atteinte puisqu'elle est infinie.

Il est troublant de se dire que la valeur exacte du nombre π ne pourra jamais être atteinte en toute exactitude. Et pourtant ce nombre est commun. C'est en se concentrant sur l'ensemble des décimales de π que l'on peut avoir le vertige en n'en voyant pas la fin. Penser le nombre lui-même par ce qui le constitue nous est hors de portée.

Les nombres

Qu'est-ce qu'un nombre ? Une question simple en apparence mais qui recèle de secrets et de mystères. Il ne s'agit pas ici de s'attarder sur des démonstrations mathématiques mais de simplement « jeter un œil au paysage ».

Quand on pense aux nombres, il nous vient tout d'abord à l'esprit les entiers naturels $\mathbb{N}$. Ils sont fiables, solides, sans surprise. Lorsqu'on les additionne ou les multiplie entre eux on reste dans cet ensemble. La soustraction fait apparaitre une autre catégorie de nombres qui comprend des entiers négatifs, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas très différent de $\mathbb{N}$ et s'apprivoise aisément. En ce qui concerne la division, elle complique un peu les choses puisqu'on ne tombe pas toujours sur des entiers. $\mathbb{Q}$ représente l'ensemble de ces nombres qui se nomment les rationnels. Même s'il est un peu différent de $\mathbb{N}$, on peut dire qu'il appartient à la même famille car tout rationnel se construit comme la division d'un entier par un autre.

Ces ensembles de nombres sont les fondements des mathématiques au cours de l'Antiquité. Mais le théorème de Pythagore vient alors mettre en péril ces bases et bouleverse les théories des nombres. Ce théorème stipule que dans un triangle rectangle, le carré de la longueur du plus grand des côtés, nommée hypoténuse, est égale à la somme des carrés des deux autres cotés. Donc, en considérant un carré de côté 1, sa diagonale est de longueur $\sqrt{2}$. Or, il est prouvé que ce nombre n'appartient pas aux rationnels. Il existe et pourtant, il ne peut être mesuré puisqu'il est constitué d'une infinité de décimales ne suivant aucun ordre logique. Il est très étrange qu'un carré que l'on peut dessiner ait un coté de longueur irrationnel. Ce nombre échappe donc à la raison, c'est un irrationnel. Après des siècles de bannissement car étant incompris, ces monstres numériques finissent par être acceptés par les mathématiciens. Puisqu'ils servent à résoudre des équations de degré 2 ou plus. Ils sont alors appelés réels et se regroupent dans $\mathbb{R}$. Mais parmi les réels, certains ne sont solutions d'aucune équation comme π. Ces réels sont appelés « les transcendants ». Aussi surprenant que cela puisse paraitre, ils forment la grande majorité des réels, c'est dire qu'en prenant au hasard un nombre sur la droite des réels, la probabilité qu'il ne soit pas transcendant est nulle.

Mais voilà que quelque chose de plus fou encore fait son apparition en 1933. Le mathématicien anglais David Gawen Champernowne découvre un nombre surprenant. On l'obtient en concaténant bout à bout tous les entiers naturels à la suite. Il est appelé par le mathématicien Jean-Paul Delahaye « nombre univers », puisqu'il contient toutes les séquences de nombres finis possibles.
Cette appellation fait référence au fait qu'on utilise des suites de nombres pour coder toutes les données écrites ou enregistrées. Ainsi, un tel nombre contiendrait alors tous les codes des données des livres et films passés et futurs de l'univers. On pense que e et π sont aussi des « nombres univers » mais cela reste très difficile à déterminer. Mais le plus étrange c'est que presque tous les réels sont des « nombres univers ». C'est-à-dire qu'en choisissant un nombre au hasard sur la droite des réels, la probabilité de tomber sur un nombre non univers est encore une fois nulle.

<u>Une échelle des infinis</u>

N'est-il pas étonnant de trouver des ensembles infinis de tailles différentes ? Comment justifier le fait qu'un infini soit plus grand qu'un autre si les deux sont précisément infini ? Tout d'abord, quand on parle de taille pour des ensembles, on fait référence au cardinal *(le nombre d'élément)* de cet ensemble. Si l'ensemble est infini, le cardinal l'est également. Le problème vient donc du fait qu'il existerait des nombres infinis plus grands que d'autres.

Le premier infini que l'on peut imaginer est celui que l'on peut compter. C'est l'infini des nombres entiers. L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien dénombrable *(on peut compter ces éléments un par un)* et il possède un cardinal infini que l'on note $\aleph_0$ *(aleph 0)*. En prenant une partie infinie de cet ensemble, par exemple l'ensemble des nombres pairs, on constate qu'ils ont la même taille. Sont cardinal est donc le même que celui de $\mathbb{N}$. Ceci peut paraitre paradoxal, mais ils ont bien le même cardinal puisqu'ils peuvent être mis en correspondance biunivoque. En poursuivant le raisonnement mais cette fois ci en sens inverse, on se rend compte que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ont également le même cardinal puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable. De même, $\mathbb{Q}$ est dénombrable (démonstration) donc il possède la même taille que les ensembles précédents. Pour l'instant, tous les ensembles infinis considérés sont équivalents en termes de nombre d'élément.

Mais qu'en est-il des réels ? L'ensemble $\mathbb{R}$ possède-t-il un cardinal fondamentalement différent des ensembles précédents ou est-il de la même taille que $\mathbb{N}$? Cantor, célèbre mathématicien répond à la question par son procédé diagonal. Le cardinal de $\mathbb{R}$ est infiniment plus grand que celui de $\mathbb{N}$ et est nommée puissance du continu. Il a été démontré par Cantor que la puissance du continue est égale à $2^{\aleph_0}$ car il possède le même nombre d'élément que les parties de $\mathbb{N}$. Ce deuxième nombre transfini est un infini strictement plus grand que $\aleph_0$. En réitérant le raisonnement, on peut considérer l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui possède donc un cardinal de $2^{2^{\aleph_0}}$ et qui est lui-même un infini strictement plus grand que le précédent.

Nous avons bien montré l'existence de plusieurs infinis. Le premier nombre infini étant $\aleph_0$, le suivant étant noté $\aleph_1$, puis $\aleph_2$, … et ainsi ce construit l'échelle de l'infini. Le tout étant de savoir si $\aleph_1$ est égale à la puissance du continue. Considérer cette égalité vraie s'appelle l'hypothèse du continu. Cantor n'a pas réussi la démontrer et pour cause : aujourd'hui on sait qu'il n'est possible démontrer ni sa véracité ni son inexactitude. Autrement dit, elle ne dit rien sur la théorie : on pourrait considérer qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse cela n'a aucune importance. Toujours est-il l'échelle des infinis existe belle et bien tant pis si cela heurte l'intuition.

L'hôtel de Hilbert

C'est un hôtel à capacité infinie, c'est-à-dire un hôtel qui peut contenir une infinité de personnes puisqu'il possède une infinité de chambres. Toujours présent à l'accueil, le réceptionniste est accoutumé à gérer les afflux massifs de personnes qui voudraient réserver une chambre pour passer la nuit. Il se charge de faire la répartition des chambres entre tous les clients.

Un jour, alors que (l'hôtel est complet), toutes les chambres sont occupées, un client se présente à l'accueil et demande une chambre. Le réceptionniste a alors une idée. Il demande à la personne de la chambre numéro 1 d'aller à la chambre numéro 2, celle de la numéro 2 à la numéro 3, …, celle de la numéro n à la numéro n+1, libérant ainsi la première chambre. Le client peut donc s'installer sans problème. C'est alors qu'un bus contenant une infinité de personne se présente à l'accueil. Comment trouver une chambre à tous ces clients ? Mais il en faut plus pour dérouter le réceptionniste qui travaille dans cet hôtel depuis des années. Il propose la chambre 2 à la personne se trouvant dans la 1, la chambre 4 à celle se trouvant dans la 2, …, la chambre 2n au client de la chambre n. Ainsi il libère toutes les chambres de numéros impaires pour les nouveaux arrivants. Tout le monde se retrouve en possession d'une chambre et aucun client n'est laissé de côté.

M. Hilbert, le gérant de l'hôtel est impressionné par la capacité de son employé à organiser. Pour tester ses limites, il demande à ce qu'une infinité de bus contenant chacun une infinité de personnes se présente à l'accueil. Et l'impensable se produit, une horde infinie de bus de capacité infinie arrive devant l'hôtel en quelques minutes. Voilà un problème fâcheux qui se pose, beaucoup plus coriace que les précédents. Peut-on réellement trouver une chambre pour chacun d'entre eux ? Il est impensable pour le concierge de refuser l'arrivée de ces clients. Ne pas donner une chambre à tout le monde signifierait perdre une infinité d'argent et donc être renvoyé. Il se souvient alors qu'il existe une infinité de nombres premiers et qu'il serait peut-être utile de les utiliser. Lui vient alors une brillante idée.

Tout d'abord, il doit faire assez de place pour les nouveaux arrivants. Il prend le premier nombre premier, 2, et annonce aux personnes de l'hôtel qu'ils doivent se déplacer à la chambre de numéro $2^{leur\ numéro\ de\ chambre\ actuel}$. Ainsi, le client de la 3 par exemple déménage à la chambre 2^3, c'est-à-dire chambre 8.

Puis il prend le premier bus et lui attribue le nombre premier suivant, 3. Il donne alors la chambre 3^1 au premier passager, la chambre 3^2 au deuxième, etc., et ceci pour toutes les personnes du premiers bus.

Ensuite, il attribue le nombre premier suivant, 5, au deuxième bus et procède de la même façon que précédemment.

En clair, sa tactique est d'assigner la chambre $(nombre\ premier\ numéro\ n+1)^m$ au passager de la place m du bus numéro n.

Grace à cette méthode, il parvient à donner une chambre à tout le monde.

Preuve : il est assez clair qu'en déplaçant les clients déjà présents dans l'hôtel il n'y a pas de chevauchement de chambre. Mais on est en droit de se demander si les nouveaux arrivants tombent bien sur une chambre libre.

Prenons une personne au hasard parmi tous les bus : bus n, place m. Pourquoi la chambre $(nombre\ premier\ numéro\ n+1)^m$ *est-elle libre ? La personne qui était à l'origine à cette chambre s'est déplacée. Mais deux questions se posent : Une personne qui était déjà présente dans l'hôtel l'a-t-elle remplacée ? Une autre personne des bus pourrait-elle se voir attribuer la même chambre ? Dans les deux cas il y aurait collision.*

En y regardant de plus près on se rend compte que la réponse est non pour ces deux questions et que l'explication est la même. Dans le premier cas, il faudrait trouver un entier p tel que 2^p = $(nombre\ premier\ numéro\ n+1)^m$ *ce qui est précisément impossible par l'unicité de la décomposition en facteur premier des nombres. Dans le deuxième cas c'est la même chose, en prenant un nombre premier q différent de* $(nombre\ premier\ numéro\ n+1)$ *on a également l'assurance que* $q^{peu\ importe\ le\ nombre}$ *ne sera jamais égale a* $(nombre\ premier\ numéro\ n+1)^m$.

« La partie est aussi grande que le tout », voilà ce que nous apprend l'étude d'ensembles infinis. Étonnant constat lorsque l'on a l'habitude de manipuler des ensembles dont le nombre d'élément est fini. Cette petite histoire est simplement l'illustration du paradoxe de la réflexivité qui consiste à envisager un ensemble A, infini, et un autre B qui est une partie de A mais qui est aussi grand que A. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs que l'on appellera $\mathbb{P}$ est une partie de $\mathbb{N}$ et pourtant, il est aussi grand que $\mathbb{N}$ puisqu'à chaque élément de $\mathbb{N}$, on peut lui associer un nombre pair. Donc, d'une part, $\mathbb{N}$ contient plus d'élément que $\mathbb{P}$ puisqu'il contient tous les nombres impairs en plus des nombres pairs, et d'autre part, il contient autant d'élément que $\mathbb{N}$ car ils sont en correspondance biunivoque l'un avec l'autre.

Mais en y regardant de plus près, il n'y a paradoxe que lorsque l'on tente d'appliquer des propriétés finies au concept d'infinitude. Parler de taille n'a plus le même sens dans ce cas. Il ne faut pas confondre « être contenu dans », venant du vocabulaire ensembliste, et « avoir une taille plus petite que ». On comprend bien que $\mathbb{P}$ est contenu dans $\mathbb{N}$ mais en définissant les ensembles infinis par la propriété qui les rendait paradoxale, (un ensemble est infini s'il peut être mis en correspondance biunivoque avec l'une de ces parties) il est normal que $\mathbb{P}$ ait une taille inférieure ou égale à $\mathbb{N}$.

Le Paradoxe de la nuit noire

A priori, il n'est guère étonnant de remarquer que le ciel nocturne est noir. Quand le soleil n'est plus présent pour l'éclairer, il n'y a plus assez de lumière pour le voir s'illuminer. Mais pourtant, en supposant que l'espace soit infini et qu'il soit uniformément rempli d'étoiles, dans chaque direction de l'espace qu'il serait possible d'observer, on devrait trouver une infinité d'étoiles, à des distances plus ou moins grande de nous mais toutes émettant de la lumière.

Donc la somme de tous ces rayons lumineux devrait rendre le ciel aussi lumineux qu'en plein jour, voire plus. Pour mieux saisir le problème, on pourrait s'imaginer perdu au beau milieu d'une forêt. Les arbres les plus proches paraitraient posséder des troncs plus épais que ceux éloignés. Mais si la forêt est assez étendue, on ne pourrait distinguer que des troncs à l'horizon. Ce même principe devrait alors s'appliquer à l'espace, qui serait une forêt remplie d'étoiles. Le fond lumineux devrait donc illuminer le ciel de jour comme de nuit sans jamais nous laisser dans le noir.

Mais pourtant la nuit, il fait sombre. Ce paradoxe peut s'expliquer de plusieurs façon grâces aux modèles relativistes et du Big Bang :

On pourrait se dire que l'espace est fini. Pour ne pas plonger dans « le paradoxe du bord », il ne s'agit pas là de se dire que l'univers possède un bord qui serait un mur infranchissable. Pour la cosmologie relativiste, la finitude de l'espace autorise la conception d'un univers fini ou infini, contournant de ce fait le problème du bord. (Autrement dit, considérer l'espace physique comme un espace fini ne répond pas à la question « Univers fini ou pas ? » mais exclu le paradoxe du bord). Si tel est le cas, l'espace contient un nombre fini d'étoiles, il n'y a donc plus de raison de penser que la nuit ne devrait pas être noire.

L'hypothèse qu'il existe un début au temps, qui correspondrait au début de l'univers, répond également au paradoxe. La vitesse de la lumière limite ce qu'il nous est donné de voir. En effet, une étoile placée à une distance si grande de nous que sa lumière mettrait un temps supérieur à l'âge de l'univers pour nous parvenir serait invisible. Donc quand bien même l'univers serait infini et qu'il possèderait une infinité d'étoiles, la grande majorité d'entre elles, pour ne pas dire une infinité, ne serait pas visible.

Soutenir le fait que l'univers serait en expansion permet aussi de résoudre le paradoxe. En effet, la dilatation de l'espace-temps modifie la vitesse de propagation de la lumière. La longueur d'onde des rayons lumineux appartenant au spectre du visible semble se décaler vers les longueurs d'onde plus grandes, de plus faible énergie. On observe alors un décalage de la lumière vers le rouge, voire l'infra-rouge, ce qui la rend invisible à nos yeux. Encore une fois, on n'a plus à s'étonner de la nuit noire.

Il est intéressant de voir que le concept l'infini fait réfléchir et pose de réelles problématiques qui ne surgisse que de faits a priori évidents.

Le Paradoxe de Zénon

Zénon d'Élée est connu pour ses paradoxes extravagants dès l'Antiquité. Il nous propose de faire une expérience mentale pour se convaincre de l'impossibilité du mouvement. Imaginons une course entre une tortue et Achille.

Achille et la tortue doivent tous deux traverser une distance X s'ils veulent gagner la course. Par soucis d'équité, la tortue part avant Achille. Lorsque c'est au tour d'Achille de courir, la tortue a déjà parcouru une distance X_1. Il doit donc d'abord rattraper la tortue s'il veut espérer gagner. Il parcourt alors la distance X_1. Mais pendant ce temps, la tortue continuait d'avancer et a parcouru une nouvelle distance X_2. Achille n'a d'autre choix que de parcourir cette nouvelle distance avant de la dépasser. Mais pendant qu'il avance de X_2, la tortue avance de

X_3, et ainsi de suite. Finalement, Achille passera son temps à rattraper la tortue sans jamais y parvenir.

Cela semble assez troublant à première vue. On sait tous qu'en réalité qu'il n'est pas difficile de dépasser une tortue. Donc, il y a eu une erreur de raisonnement quelque part. En effet, le temps mis pour parcourir une distance finie est fini. Par contre, ce temps peut très bien être infiniment divisé. C'est ce qui se produit ici. Zénon ne fait que fragmenter infiniment le temps qu'Achille met à rattraper la tortue. Si on attribue des valeurs numériques aux grandeurs qu'on manipule pour plus de clarté, on peut se dire qu'Achille va 10 fois plus vite que la tortue. Si on donne une avance de 10 mètres à la tortue, lorsqu'elle avance de 1 mètre, Achille parcourt 10 mètres, puis elle avance de 1/10 mètres et il parcourt 1 mètre, etc. La somme des distances étant convergente vers un nombre fini, on a bien fragmenté le temps nécessaire au dépassement de la tortue. Le corps du raisonnement de Zénon n'est pas faux en soit, seule la conclusion est incorrecte.

Cet exemple nous montre qu'il est complexe de manipuler l'infini et que l'on peut vite si perdre dans les conclusions à tirer.

<u>Le Paradoxe du bord</u>

Supposons que l'univers soit fini. Il possède de ce fait un bord, une frontière délimitant son étendue. Or si on se plaçait précisément à cette bordure, et que l'on agitait du bout du bras un bâton vers l'extérieur, il serait assez saugrenu de penser qu'on ne puisse pas le faire, et qu'un mur se dresserait devant nous, nous empêchant de passer. Ce dans quoi on agite le bâton est soit un corps, soit l'espace. Donc l'univers ne s'arrête pas là où je me suis placé. En répétant l'expérience de pensée, Archytas de Tarente, pythagoricien du V siècle s'oppose au modèle d'un univers fini.

Bien que l'idée de bord paraît complètement absurde, il n'est pas pour autant certain que l'univers soit infini. En réalité, tout dépend de sa courbure. En effet, un espace infini n'implique pas forcément un Univers infini.

Les trous noirs

Imaginez un objet dont la gravité est si forte qu'il a comprimé toute la matière en seul point. Le champ gravitationnel est si intense que toute matière et toute lumière ne peut y échapper.

Le nom « Trou noir » vient précisément de là : cet objet ne peut ni réfléchir, ni émettre de la lumière. A priori, tout objet céleste peut devenir un trou noir. Il suffit de le compresser suffisamment pour que sa densité (masse par unité de volume) dépasse un seuil critique. En fonction de sa masse, on peut donc déterminer le rayon critique (appelé rayon de Schwarzschild) en dessous duquel il faudra concentrer la matière pour former un trou noir. Le trou noir ce rayon délimite une frontière très étrange. Elle fait de cet objet céleste un monde à part. En particulier, même la lumière ne peut ressortir lorsqu'elle passe la frontière qui est appelée horizon des événements : frontière de l'espace à sens unique. Il est possible de plonger à l'intérieur mais impossible d'en ressortir. Il faut bien comprendre que cet horizon délimite une frontière fictive d'espace-temps, défini par la distance à partir de laquelle tous photons ont des trajectoires s'achevant au centre du trou noir, limite à notre connaissance.

L’étude des trous noirs par des raisonnements relativistes conduisent à des aberrations. A l’approche de l’horizon des évènements, les propriétés de l’espace et du temps deviennent troublantes. Le mètre se contracte et tend vers 0 tandis que la seconde se dilate à l’infini. Mais nos sens ne sont que troublés en réalité. Imaginons qu’on se place tout près d’un trou noir, et qu’un astronaute décide de plonger à l’intérieur. Alors qu’il saute, il nous salue d’un geste de la main. Il passe l’horizon des événements sans s’en rendre compte et termine sa chute au fond du trou noir. Sa chute est bien finie et au passage de la frontière, il ne se passe rien d’anormal. En tant qu’observateur dans le vaisseau, nous avons une vision différente de la scène. Alors qu’on le voit sauter et nous saluer, il ralentit jusqu’à se figer complètement lors de son approche de l’horizon des événements. La durée du saut nous parait infinie.

Concentrons-nous à présent sur l’intérieur du trou noir. L’ensemble de la matière est inexorablement attiré par un point précis du centre qu’on nomme « singularité ». La matière y est infiniment comprimée, la courbure de l’espace y est infinie. Ce point précis marque la fin du temps pour tout objet l’atteignant. Puisque rien ne peut en sortir, l’information de ce qui est tombé dedans est à jamais perdu et il n’y a aucun moyen pour nous de savoir ce qu’il se passe à l’intérieur. L’horizon du trou noir se place en tant que limite de notre connaissance, ce qui pose un réel problème : qui nous dit que les lois de la physique ne sont pas bafouées à l’intérieur ? Mais, même si la singularité est un point inconnu, son influence reste contenue à l’intérieur de l’horizon des événements, à l’intérieur du trou noir et ne peut affecter le monde extérieur. Pourtant, la théorie de la relativité générale autorise des singularités sans horizon, c’est-à-dire des singularités sans trou noir. Ce sont des singularités nues et elles sont extrêmement problématiques. En effet, contrairement à celles confinées dans le trou noir, une singularité nue pourrait avoir une influence sur l'univers tout entier ce qui rend impossible la vision déterministe de celui-ci en considérant nos connaissances actuelles sur la physique de notre monde.

Cette singularité est effrayante, si bien que les physiciens tentent de rendre ces infinis finis. Mais Stephen Hawking et Roger Penrose démontrent l'existence de celle-ci.
On ne peut, en toute rigueur, observer un trou noir mais la courbure de l'espace-temps (à l'origine de la gravité) est bien réelle ce qui permet de le mettre en évidence.

Voyage au sein de notre univers

Depuis que l'homme a pu se questionner sur son origine, il a cru qu'il détenait une place spéciale dans l'univers. Privilège divin ou encore « joyaux de l'évolution », il se considérait comme centre de l'univers. Puis il a regardé vers le ciel et, il s'est mis à explorer…

Il a découvert que la Terre sur laquelle il vit n'est qu'une planète parmi tant d'autres, plutôt banale, tournant autour de son étoile, le Soleil, plutôt petit lui aussi, comparé aux géantes et supergéantes qui dominent l'espace.
Il l'a même qualifiée de naine jaune, un classement dérisoire sachant que c'est l'astre le plus grand, et de loin, de notre système solaire. Il est de taille ridicule devant la grandiose ETA CARINAE par exemple, qui est 1 000 000 de fois plus lumineuse que le Soleil, ou encore la majestueuse UY SCULI, 5 000 000 000 fois plus lumineuse encore. Le Soleil n'est pas un astre privilégié et possède de très nombreux congénères disséminés partout dans l'univers.

Il a découvert que l'univers regorge d'astres plus lumineux que le Soleil qui n'est qu'une petite étincelle face aux mastodontes de lumière. Mais ces étoiles sont à des distances qu'il peine à se représenter par la pensée. Pour mesurer la distance entre ces étoiles, il a dû inventer une nouvelle unité de mesure : l'Année Lumière. C'est fondamentalement la distance que la lumière parcourt pendant une année : 10 000 000 000 000 km. 1 A.L. est à 1 km ce que 1 km est à l'atome. Et l'univers connu mesure 80 000 000 000 A.L.

Il a découvert que son système solaire n'était qu'une fraction infime d'un tout plus grand encore : la galaxie. Réunion d'astres, amas de lumière venant briser le noir et le froid de l'espace. Il occupe la bordure extérieure de cette fabuleuse spirale lumineuse qu'il nomme Voie Lactée.

Il a découvert que les galaxies sont astronomiquement nombreuses et qu'une galaxie contient entre 100 et 400 milliards d'étoiles. En considérant seulement l'univers visible, il détient environ 400 sextillions d'étoiles, un nombre si grand qu'il est tout simplement impossible à se le représenter. Pourtant ce n'est pas si compliqué. Il y a autant d'étoiles dans l'univers observables que de gouttes d'eau dans tous les océans de la Terre.

Il a découvert que ceci ne représente que la zone observable de l'univers, probablement infime partie de l'univers réel. L'homme ne peut voir ce qu'il voit que parce que la lumière parvient à faire le chemin de l'objet à son œil en un temps raisonnable. Les astres situés au-delà de l'univers observable nous sont invisibles puisque la lumière n'a pas eu le temps de parcourir la distance nous séparant d'eux. En regardant au-delà, il ne peut qu'imaginer et spéculer sur les objets peuplant son univers réel.

Il a découvert un monde si grand et pourtant, il est probable qu'il n'ait fait qu'une toute petite partie du chemin qu'il ambitionne de parcourir. Devant cette immensité, l'homme peine à se représenter l'univers dans son ensemble. De taille insignifiante, comment pourrait-il appréhender l'infini de son monde ?

Voyage vers l'infiniment petit

L'échelle de l'humain correspond au mètre. C'est l'unité de distance fondamentale, celle que l'homme a choisi pour se donner un étalon. C'est la mesure parfaite pour décrire les grandeurs que nous côtoyons au quotidien. Celle qui nous parait la plus naturelle, la mieux comprise, la plus apprivoisée.

Lorsqu'on prend un mètre et que l'on fractionne en 1 000 morceaux, on trouve le millimètre. C'est la taille d'une fourmi.

En fractionnant ce millimètre en 1 000 morceaux encore une fois, on tombe sur le micromètre. Le micromètre est l'échelle de la cellule. Elle est si petite qu'on ne peut la voir à l'œil nue et qu'il faut commencer à utiliser des instruments optiques grossissant pour la voir.

Dix mille fois plus petit encore que la taille de la cellule, on trouve l'échelle atomique. L'atome est de l'ordre de 0,1 nanomètre.

Cent mille fois plus petit que cette taille, on tombe sur le diamètre d'un noyau atomique (10^{-14} mètre). Mais ce même noyau est composé de protons et de neutron dont la taille est dix fois plus petite que celle du noyau.

Mais le voyage ne s'arrête pas là. Plus petit encore, on trouve des particules élémentaires qu'on nomme fermions. Le quark est cent mille fois plus petit que le noyau. A cette échelle, il est impossible de les observer au microscope ou même par n'importe quel moyen au prix de contredire les théories quantiques. Il faut utiliser d'autres moyens pour détecter la présence de ces particules.

En l'état actuel de la science, ce sont les particules les plus petites que nous connaissons. Y-a-t-il une limite à cette descente fulgurante dans l'échelle subatomique ? L'infiniment petit nous est-il accessible ? Difficile de répondre. En tous cas, il y a une limite que l'on appelle longueur de Planck à partir de laquelle la physique que nous connaissons ne décrit plus rien et n'a plus aucune influence (10^{-35} m).

L'origine du temps

Le problème du temps se pose à l'inverse de celui de l'espace. Alors que l'on pourrait s'attendre à ce qu'il soit infini, éternel, la question de sa finitude passée se pose réellement. Le temps s'étend-t-il infiniment dans le passé ou est-il borné par une valeur finie ?

Les modèles de Big Bang avancent qu'il y a bien une origine au temps : une date zéro, t_0, où l'univers n'était que singularité, juste avant son expansion. L'univers aurait un âge fini $age_{univers} = t_{aujourd'hui} - t_0$. Comme l'univers représente par définition le tout général, on ne peut considérer un instant avant t_0 puisque rien n'est plus âgé que l'univers lui-même.

Le problème se pose encore plus effrayant que le fini de l'espace. Il suppose que la limite temporelle est sous la forme d'une singularité et que l'univers évolue. Pour des valeurs précises de Λ, les équations de la relativité générale débouchent sur une contraction de l'univers depuis un temps infini passé jusqu'à un confinement de la matière minimale, tout en évitant la singularité gravitationnelle, puis l'extension jusqu'à un temps infini futur. Mais ce modèle ne convient plus à la suite de récentes observations.

Bien que le nom de « Big Bang » fait contre sens puisqu'elle suggère une explosion de matière spontanée, alors qu'en réalité il s'agirait, selon les physiciens, d'une expansion de l'espace et du temps, c'est la théorie qui sort du lot. Mais elle nous interdit de considérer un instant antérieur à t_0 et toute la matière de l'univers aurait dû se concentrer en un point précis. Selon cette hypothèse, à la manière d'un trou noir, la singularité primordiale serait le point de convergence passé de toutes les lignes d'univers et marque donc la fin du temps ou le commencement de tout.

Mais à ce stade, il faut bien comprendre que ce ne sont encore que des suppositions. En effet, la physique actuelle ne nous permet pas la reconstitution des événements jusqu'à t_0, mais jusqu'à $t_p = t_0 + 10^{-43}$seconde. Cette frontière temporelle est la limite de toutes nos théories jusqu'à présent. Il nous tarde de trouver une thèse qui unifierait quantique et relativité générale pour résoudre le mystère de l'origine de l'univers.

Biblio PACE

PETITES HISTOIRE DES SCIENCES. Évolution de l'infini [en ligne]. Disponible sur : https://petiteshistoiresdessciences.com/2015/03/11/linfini/ [13/12/2022]

FUTURA. Qu'est-ce que l'infini [en ligne]. Disponible sur : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-infini-mysteres-limites-univers-574/page/2/ [1/12/2022]

FUTURA. L'infini : mystères et limites de l'Univers [en ligne]. Disponible sur : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-infini-mysteres-limites-univers-574/ [1/12/2022]

FUTURA. Notre monde est-il fini ou infini ? [en ligne]. Disponible sur : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-infini-mysteres-limites-univers-574/page/3/ [1/12/2022]

FUTURA. Les paradoxes de l'infini [en ligne]. Disponible sur : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-infini-mysteres-limites-univers-574/page/6/ [1/12/2022]

FUTURA. L'infini de la matière : le vide [en ligne]. Disponible sur : https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-infini-mysteres-limites-univers-574/page/8/ [1/12/2022]

TRUST MY SCIENCE. L'univers est-il vraiment infini [en ligne]. Disponible sur : https://trustmyscience.com/univers-est-il-vraiment-infini/ [1/12/2022]

GALISON Peter. *Trous noirs : Aux confins du savoir.* Documentaire de 1 h 39 min. Publication : 1 juin 2021 (France). [10/01/2023]

Philosophie magazine. Infini [en ligne]. Disponible sur : https://www.philomag.com/lexique/infini [5/12/2023]

Pour la Science. *Vers une nouvelle théorie de l'infini.* N°504 – octobre 2019 [13/12/2022]

SCIENCE&VIE. Quelle est la taille de l'Univers [en ligne]. Disponible sur : https://www.science-et-vie.com/questions-reponses/quelle-est-la-taille-de-lunivers-11067.html [13/12/2022]

Université de Lausanne. « La quête de l'infini en mathématiques » Cours (Sciences)2 - UNIL [en ligne]. Disponible sur :
https://www.youtube.com/watch?v=uDdIuWd__ac [13/12/2022]

Hypotheses. L'infini [en ligne]. Antoine HOULOU-GARCIA. Disponible sur :
https://mathantique.hypotheses.org/128 [13/12/2022]

TED-Ed. Le paradoxe de l'Hôtel Infini – DEKOFSKY Jeff [en ligne]. Disponible sur :
https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo [14/12/2022]

Société Française d'Exobiologie. Le Temps et l'Origine de l'Univers (partie1) – LACHIEZE-REY Marc [en ligne]. Disponible sur :
https://www.youtube.com/watch?v=2HoCFpqXvQc [20/01/2022]

Société Française d'Exobiologie. Le Temps et l'Origine de l'Univers (partie2) – LACHIEZE-REY Marc [en ligne]. Disponible sur :
https://www.youtube.com/watch?v=PQlYRv75CPE [20/01/2022]

Arte. Voyages au pays des maths : Sur la route de l'infini [en ligne]. Disponible sur :
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-005-A/voyages-au-pays-des-maths/ [22/12/2022]

Arte. L'infime et l'infini | Une espèce à part [en ligne]. Disponible sur :
https://positivr.fr/infime-et-infini-immensite-univers/ [20/01/2022]

Jean-Baptiste Jeangène Vilmer, (2009). « Le paradoxe de l'infini cartésien » dans *Archives de Philosophies* Tome 72 p.497-521

SCHNELL Alexander, (2013). « L'image de l'infini. Sources spéculatives de l'idéalisme allemand » dans Archives de Philosophie Tome 76 p.5-7

VENGEON Frédéric, (2013). « Infini et logique spéculative. Deux philosophies de l'absolu : Nicolas de Cues et Hegel » dans Archives de Philosophie Tome 76 p.61-79

LUMINET Jean-Pierre et LACHIEZE-REY Marc, (2016). De l'infini : *horizons cosmiques, multivers et vide quantique*, DUNOD, 248 pages.